E.N. METEO Epreuve de MATHEMATIQUES I (3 h) 1982

Les trois parties de ce problème sont dépendantes, mais chaque question pourra être abordée en supposant admis les résultats des demonstrations précédentes. Il sera d'autre part tenu compte de la clarté et de la rigueur des démonstrations.

Notations et conventions

Dans les trois parties du problème, on appelle f une fonction strictement monotone et continue sur $\mathbb{R}_+^*$

On rappelle qu'une fonction f est dite convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ si $\forall t_1, t_2 \in [0,1]^2$ tels que $t_1 + t_2 = 1$, on a $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2)$

Si f admet une dérivée seconde (notée f") continue, il suffit alors que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) \geqslant 0$

Partie I

1- Soient $x_1, \ldots, x_n$ n réels strictement positifs tels que $x_1 < x_2 \leqslant \ldots < x_n$, montrer qu'il existe un réel x et un seul dans $[x_1, x_n]$ tel que $n.f(x) = f(x_1) + \ldots + f(x_n)$

On dira que ce réel est la f-moyenne de $(x_1, \ldots, x_n)$

2- On prend n=2 et pour f(u): $\alpha u + \beta$, u^2, Log u, $\frac{1}{u}$. Calculer dans ces quatre cas la f-moyenne de (x_1, x_2). Ces moyennes seront appellées respectivement arithmétique, quadratique, géométrique et harmonique.

3- Soient m_1, m_2, m_3, m_4 les moyennes arithmétique, quadratique, géométrique et harmonique de (x_1, x_2). Montrer que l'ordre de m_1, m_2, m_3, m_4 est indépendant des valeurs de x_1 et x_2 et préciser cet ordre.

4- Si, pour n quelconque, f est croissante et convexe, comparer la f-moyenne de $(x_1, \ldots, x_n)$ avec sa moyenne arithmétique.

5- Déterminer des conditions liant f et g pour que la f-moyenne de $(x_1, \ldots, x_n)$ soit supérieure à sa g-moyenne et généraliser les inégalités du 3- dans le cas de n réels.

6- Soient pour $k \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f(u) = u^k$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ un n-uplet de réels strictement positifs ordonnés de façon croissante. On note μ_k la f-moyenne de $(x_1, \ldots, x_n)$. Montrer que la suite (μ_k) est croissante. Quelle est sa limite?

Partie II

Soit ϕ une fonction continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On appelle f-moyenne de la fonction ϕ sur $[a,b]$ $(a>0)$ le réel m tel que:

$$(b - a)\, f(m) = \int_b^a (f \circ \phi)(u)\, du$$

1- Montrer l'existence et l'unicité de la f-moyenne de ϕ.

2- On pose $a_i = a + (b - a)\frac{i}{p}$, $i \in [1, p]$. Relier la notion de f-moyenne de ϕ sur [a,b] à la notion de f-moyenne d'un p-uplet. $(p \in \mathbb{N}^*)$

3- Dans le cas particulier des quatre fonctions f du I.2, que peut-on dire de l'ordre des f-moyennes d'une fonction ϕ quelconque?

4- Montrer que si sur [a,b] $\phi < \psi$, la f-moyenne de ϕ est inférieure à la f-moyenne de ψ.

5- Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $f(u) = u^k$. Etudier la limite de la f-moyenne de ϕ quand k tend vers l'infini.

Partie III

On définit trois suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ par la donnée de u_0, v_0, w_0 strictement positifs tels que $u_0 w_0 = v_0^2$, $u_0 \geqslant w_0$ et par les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + v_n + w_n)\ ;\ v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n v_n w_n}\ ;\ w_{n+1} = \frac{3 u_n v_n w_n}{u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n}$$

1- Comparer pour tout n positif ou nul u_n, v_n, w_n.

2- Montrer que les suites (u_n) et (w_n) sont adjacentes.

3- Que peut-on dire du sens de variation de v_n? En déduire la limite commune de u_n, v_n et w_n.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail